

Deben notarse dos cosas con respecto a nuestra solución. Primero, el hecho de que $(6x^2 + 12)dx$ es $2du$ en lugar de du no causa problema; por la linealidad de la integral, el factor 2 pudo colocarse al frente del signo de la integral. Segundo, terminamos con una constante arbitraria $2C$. También ésta es una constante arbitraria; llamémosle K .

(b) Sea $u = x^2 + 4$; entonces $du = 2x dx$. Así,

$$\begin{aligned} \int (x^2 + 4)^{10} x dx &= \int (x^2 + 4)^{10} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2x dx \\ &= \frac{1}{2} \int u^{10} du \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{u^{11}}{11} + C \right) \\ &= \frac{(x^2 + 4)^{11}}{22} + K \end{aligned}$$

Revisión de conceptos

- La regla de la potencia para derivadas dice que $d(x^r)/dx = \underline{\hspace{2cm}}$. La regla de la potencia para integrales dice que $\int x^r dx = \underline{\hspace{2cm}}$.
- La regla generalizada de la potencia para derivadas dice que $d[f(x)]^r/dx = \underline{\hspace{2cm}}$. La regla generalizada de la potencia para integrales dice que $\int \underline{\hspace{1cm}} dx = [f(x)]^{r+1}/(r+1) + C, r \neq -1$.

- $\int (x^4 + 3x^2 + 1)^8(4x^3 + 6x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$.
- Con base en la linealidad, $\int [c_1 f(x) + c_2 g(x)] dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

Conjunto de problemas 3.8

Encuentre la antiderivada general $F(x) + C$ para cada una de las siguientes funciones.

- | | |
|---|--|
| 1. $f(x) = 5$ | 2. $f(x) = x - 4$ |
| 3. $f(x) = x^2 + \pi$ | 4. $f(x) = 3x^2 + \sqrt{3}$ |
| 5. $f(x) = x^{5/4}$ | 6. $f(x) = 3x^{2/3}$ |
| 7. $f(x) = 1/\sqrt[3]{x^2}$ | 8. $f(x) = 7x^{-3/4}$ |
| 9. $f(x) = x^2 - x$ | 10. $f(x) = 3x^2 - \pi x$ |
| 11. $f(x) = 4x^5 - x^3$ | 12. $f(x) = x^{100} + x^{99}$ |
| 13. $f(x) = 27x^7 + 3x^5 - 45x^3 + \sqrt{2}x$ | |
| 14. $f(x) = x^2(x^3 + 5x^2 - 3x + \sqrt{3})$ | |
| 15. $f(x) = \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^3}$ | 16. $f(x) = \frac{\sqrt{2x}}{x} + \frac{3}{x^5}$ |
| 17. $f(x) = \frac{4x^6 + 3x^4}{x^3}$ | 18. $f(x) = \frac{x^6 - x}{x^3}$ |

En los problemas del 19 al 26 evalúe las integrales indefinidas que se indican.

- | | |
|--|---|
| 19. $\int (x^2 + x) dx$ | 20. $\int (x^3 + \sqrt{x}) dx$ |
| 21. $\int (x + 1)^2 dx$ | 22. $\int (z + \sqrt{2z})^2 dz$ |
| 23. $\int \frac{(z^2 + 1)^2}{\sqrt{z}} dz$ | 24. $\int \frac{s(s + 1)^2}{\sqrt{s}} ds$ |
| 25. $\int (\sin \theta - \cos \theta) d\theta$ | 26. $\int (t^2 - 2 \cos t) dt$ |

En los problemas del 27 al 36 utilice los métodos de los ejemplos 5 y 6 para evaluar las integrales indefinidas.

- | | |
|---|--|
| 27. $\int (\sqrt{2x + 1})^3 \sqrt{2} dx$ | 28. $\int (\pi x^3 + 1)^4 3\pi x^2 dx$ |
| 29. $\int (5x^2 + 1)(5x^3 + 3x - 8)^6 dx$ | |
| 30. $\int (5x^2 + 1)\sqrt{5x^3 + 3x - 2} dx$ | |
| 31. $\int 3t\sqrt[3]{2t^2 - 11} dt$ | 32. $\int \frac{3y}{\sqrt{2y^2 + 5}} dy$ |
| 33. $\int x^2 \sqrt{x^3 + 4} dx$ | |
| 34. $\int (x^3 + x)\sqrt{x^4 + 2x^2} dx$ | |
| 35. $\int \sin x (1 + \cos x)^4 dx$ | |
| 36. $\int \sin x \cos x \sqrt{1 + \sin^2 x} dx$ | |

En los problemas del 37 al 42 se da $f''(x)$. Encuentre $f(x)$ antiderivando dos veces. Observe que en este caso su respuesta debe incluir dos constantes arbitrarias, una proveniente de cada antiderivación. Por ejemplo, si $f''(x) = x$, entonces $f'(x) = x^2/2 + C_1$ y $f(x) = x^3/6 + C_1x + C_2$. Las constantes C_1 y C_2 no pueden combinarse porque C_1x no es una constante.

- | | |
|-----------------------|------------------------|
| 37. $f''(x) = 3x + 1$ | 38. $f''(x) = -2x + 3$ |
|-----------------------|------------------------|

39. $f''(x) = \sqrt{x}$ 40. $f''(x) = x^{4/3}$
 41. $f''(x) = \frac{x^4 + 1}{x^3}$ 42. $f''(x) = 2\sqrt[3]{x + 1}$

43. Demuestre la fórmula

$$\int [f(x)g'(x) + g(x)f'(x)] dx = f(x)g(x) + C$$

Sugerencia: véase el recuadro al margen junto al teorema A.

44. Demuestre la fórmula

$$\int \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} dx = \frac{f(x)}{g(x)} + C$$

45. Utilice la fórmula del problema 43 para encontrar

$$\int \left[\frac{x^2}{2\sqrt{x-1}} + 2x\sqrt{x-1} \right] dx$$

46. Utilice la fórmula del problema 43 para encontrar

$$\int \left[\frac{-x^3}{(2x+5)^{3/2}} + \frac{3x^2}{\sqrt{2x+5}} \right] dx$$

47. Encuentre $\int f''(x) dx$ si $f(x) = x\sqrt{x^3 + 1}$.

48. Demuestre la fórmula

$$\int \frac{2g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{2[g(x)]^{3/2}} = \frac{f(x)}{\sqrt{g(x)}} + C$$

49. Demuestre la fórmula

$$\int f^{m-1}(x)g^{n-1}(x)[nf(x)g'(x) + mg(x)f'(x)] dx = f^m(x)g^n(x) + C$$

50. Evalúe la integral indefinida

$$\int \operatorname{sen}^3[(x^2 + 1)^4] \cos[(x^2 + 1)^4](x^2 + 1)^3 x dx$$

Sugerencia: sea $u = \operatorname{sen}(x^2 + 1)^4$.

51. Evalúe $\int |x| dx$. 52. Evalúe $\int \operatorname{sen}^2 x dx$.

CAS 53. Algunos paquetes de software pueden evaluar integrales indefinidas. Utilice su software en cada una de las siguientes integrales.

- (a) $\int 6 \operatorname{sen}(3(x - 2)) dx$
 (b) $\int \operatorname{sen}^3(x/6) dx$
 (c) $\int (x^2 \cos 2x + x \operatorname{sen} 2x) dx$

EXPL CAS 54. Sea $F_0(x) = x \operatorname{sen} x$ y $F_{n+1}(x) = \int F_n(x) dx$.

- (a) Determine $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$, y $F_4(x)$.
 (b) Con base en la parte (a) realice una conjetura sobre la forma de $F_{16}(x)$.

Respuestas a la revisión de conceptos: 1. rx^{r-1} ; $x^{r+1}/(r+1) + C$, $r \neq -1$ 2. $r[f(x)]^{r-1}f'(x)$; $[f(x)]^r f'(x)$
 3. $(x^4 + 3x^2 + 1)^9/9 + C$ 4. $c_1 \int f(x) dx + c_2 \int g(x) dx$

3.9 Introducción a ecuaciones diferenciales

En la sección precedente, nuestra tarea fue antiderivar (integrar) una función f para obtener una nueva función F . Escribimos

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

y, por definición, esto fue correcto siempre y cuando $F'(x) = f(x)$. Ahora $F'(x) = f(x)$ en el lenguaje de derivadas es equivalente a $dF(x) = f(x)dx$ en el lenguaje de diferenciales (véase la sección 2.9). Por lo tanto, podemos interpretar la fórmula del recuadro como

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

Desde esta perspectiva, integramos la diferencial de una función para obtener la función (más una constante). Éste fue el punto de vista de Leibniz; adoptarlo nos ayudará a resolver *ecuaciones diferenciales*.

¿Qué es una ecuación diferencial? Para motivar nuestra respuesta, empezamos con un ejemplo sencillo.

EJEMPLO 1 Encuentre una ecuación, en x y y , de la curva que pasa por el punto $(-1, 2)$ y cuya pendiente en cualquier punto de la curva es igual a dos veces la abscisa (coordenada x) de ese punto.